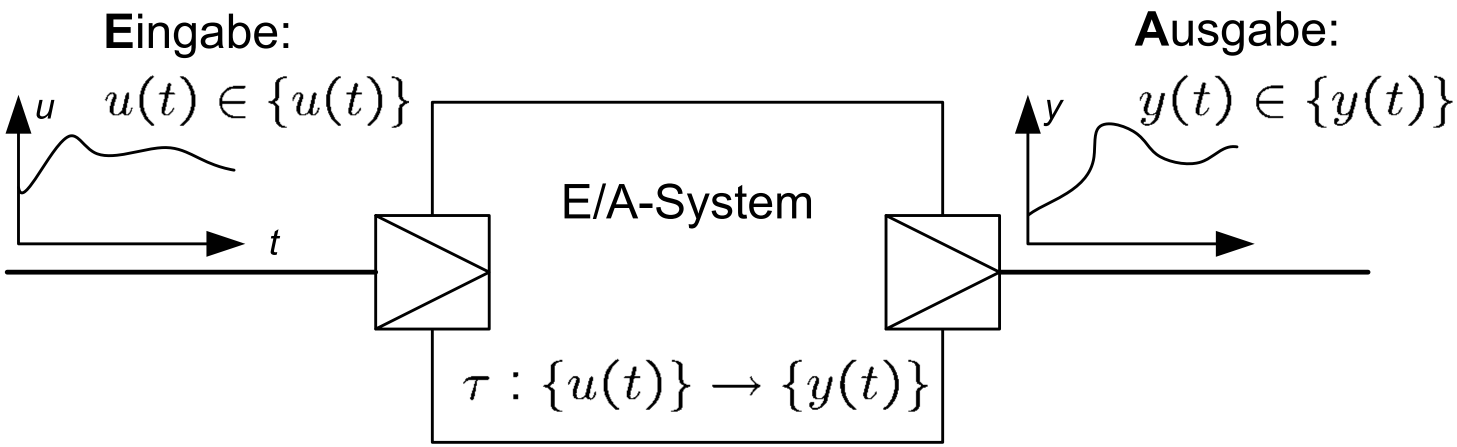
2. Vorlesung

“Systemtheorie für Informatiker”

Dr. Christoph Grimm

Professur Prof. Dr. K. Waldschmidt, Univ. Frankfurt/Main

Letzte Woche: EA-System



Modellierung von Systemen als EA-System: Vorteile, Nachteile

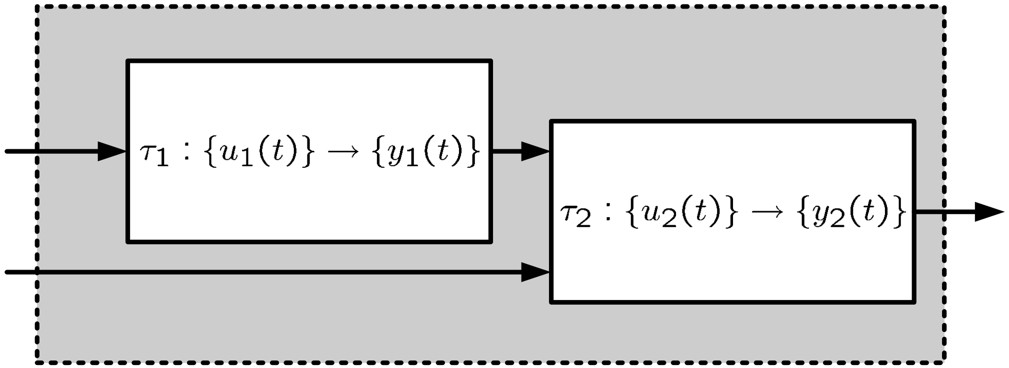
- Vorteile:
  - Modellierungsprinzip sehr allgemein.
  - Es werden keine Annahmen über den Aufbau des Systems gemacht.

- Nachteile:
  - Angabe einer Funktion $\mathcal{T}\{\cdot\}$ nur für wenige Systeme möglich.
  - Annahmen über Aufbau des Systems können bei Modellierung hilfreich sein.

Diese Woche: Eigenschaften und Klassen von Systemen

- Beschreibung von Systemen durch Struktur
  - Parallele Komposition, sequenzielle Komposition, Rückführung
- Beschreibung von Systemen mit inneren Zuständen
  - Zeitkontinuierliche, zeitdiskrete, ereignisdiskrete Systeme
- Eigenschaften von Systemen:
  - Innere Zustände, Kausalität, Stabilität
  - Zeitinvarianz
  - Linearität
  - Superpositionsprinzip

Beschreibung von Systemen durch ihre Struktur



System wird durch Menge von Komponenten beschrieben, die in Wechselwirkung stehen.

Wechselwirkungen sind gerichtete Signale (konservative Systeme).

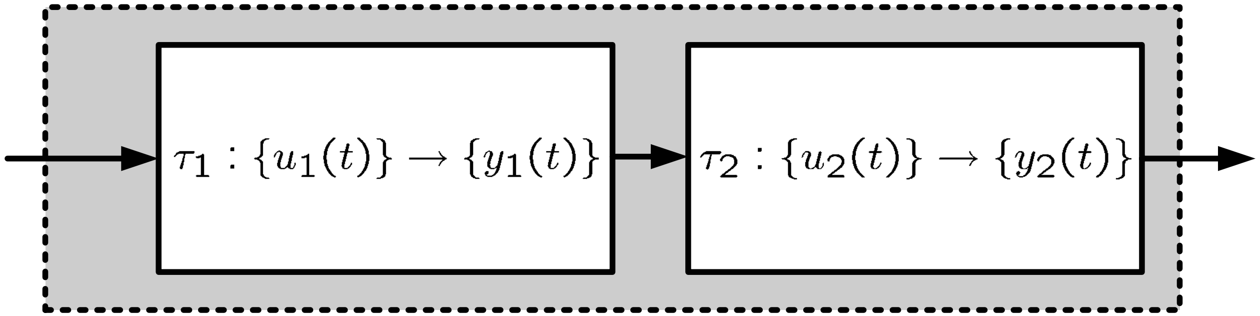
Graphische Darstellung: Teile als *Blöcke*, Signale/Wechselwirkungen als *Verbindungspfeile*.

Welches Verhalten hat eine Struktur?

Elementare Operationen:

- Verzweigung, Identität, Vertauschung (Tafel)
- Sequenzielle Komposition
- Parallele Komposition
- Rückführung

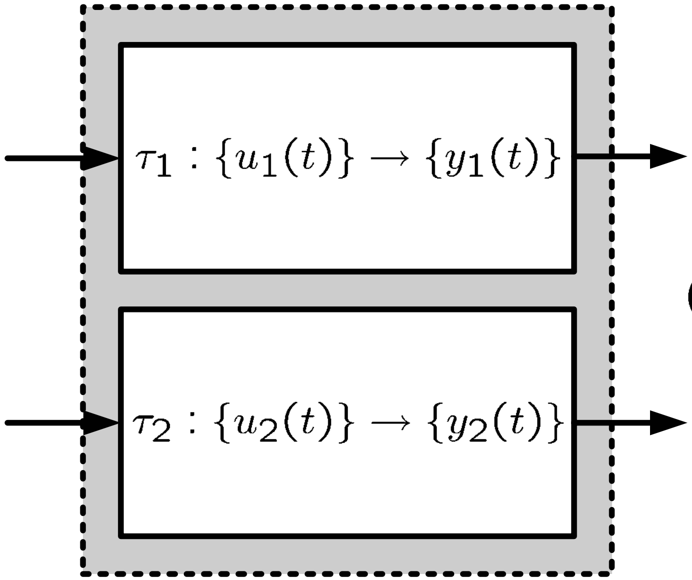
Sequenzielle Komposition



$$\tau_1 \circ \tau_2 : \{u_1(t)\} \to \{y_2(t)\}$$

Mit $(\tau_1 \circ \tau_2)(u_1(t)) = \tau_2(\tau_1(u_1(t)))$,
d. h. τ_1 wird zunächst ‘ausgeführt’, dann erst τ_2 auf deren Ergebnis angewandt.

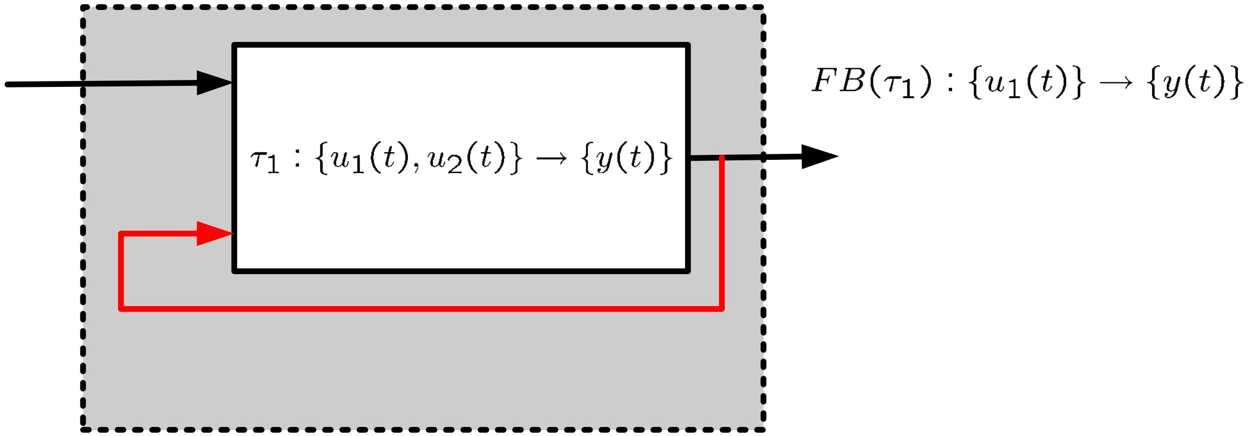
Parallele Komposition



$(\tau_1 || \tau_2)(u_1(t), u_2(t))$

Mit $(\tau_1 || \tau_2)(u_1(t), u2(t)) = \tau_1(u_1(t)), \tau_2(u_2(t))$

Rückführung

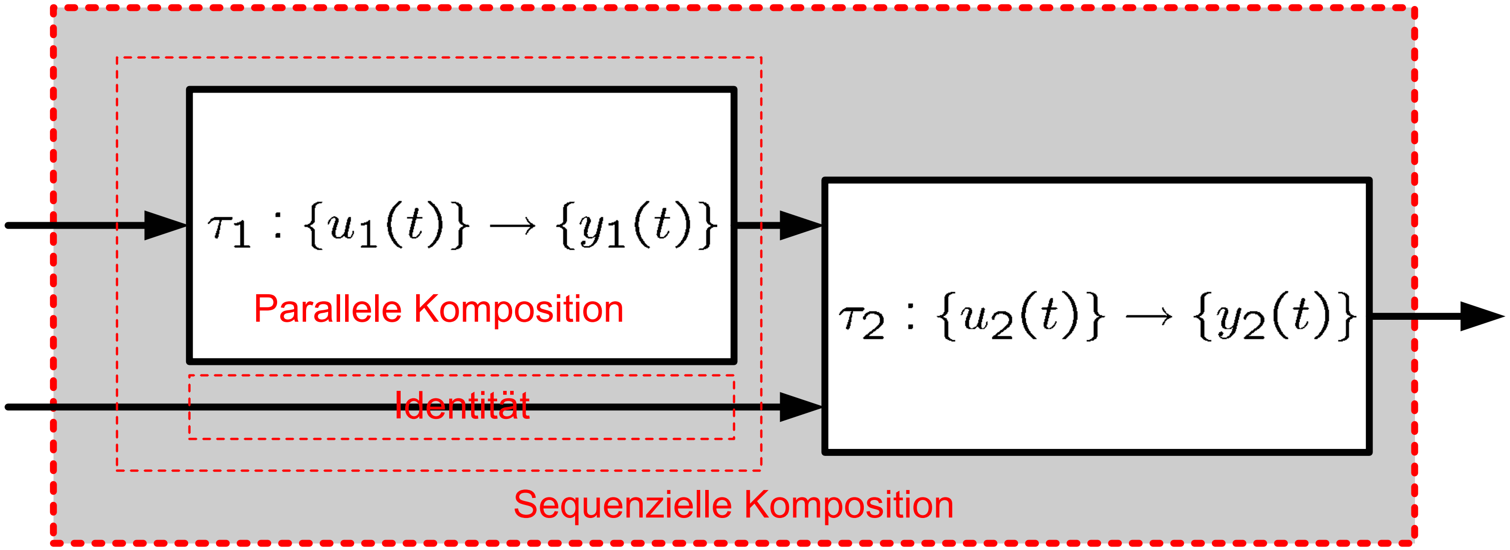


Wobei $FB(u_1(t))$ die Menge der Werte sind, für die gilt:

$$y(t) = u_2(t) \quad \forall t \in T$$

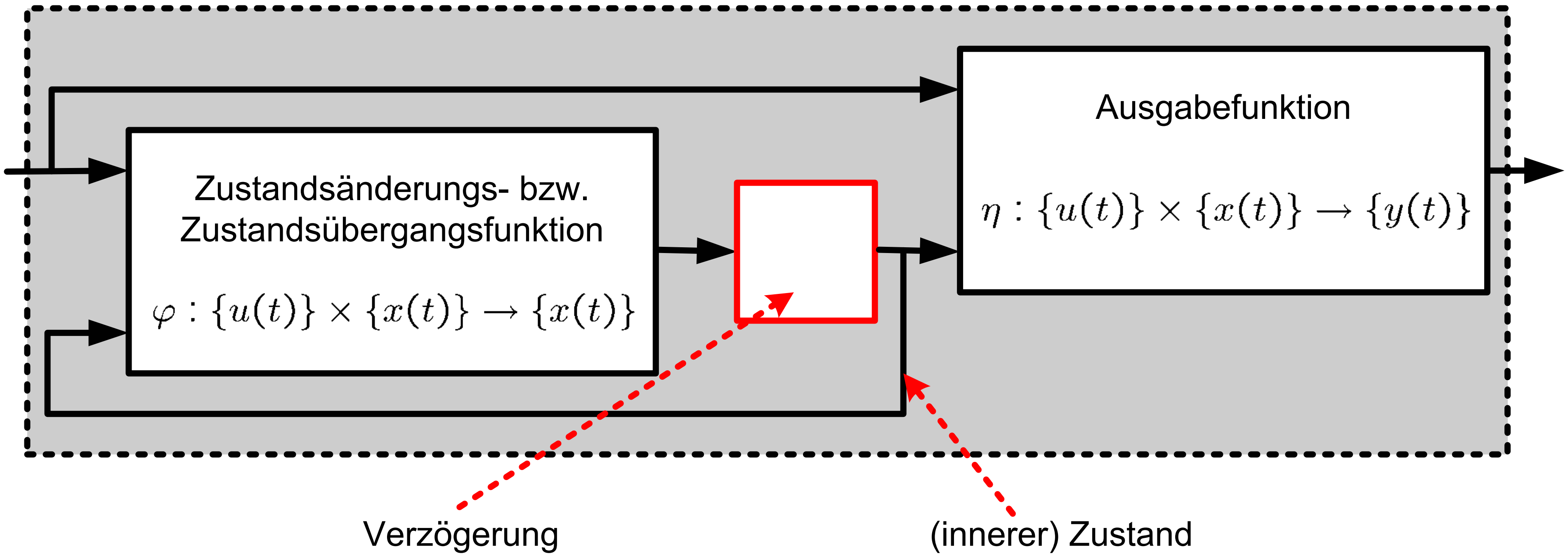
d. h. $FB(u_1(t))$ ergibt sich als Lösung eines Gleichungssystems.

Beschreibung von Systemen durch ihre Struktur — Beispiel



Beschreibung von Systemen mit inneren Zuständen

Das Modell des *allgemeinen, dynamischen Systems* führt den Begriff *innerer Zustand* ein:



Spezielle Klassen dynamischer Systeme: DESS, DTSS, DEVS

Klassen von dynamischen Systemen:

1. **D**iscrete **T**ime **S**pecified **S**ystems
   (DTSS, zeitdiskrete Systeme).

2. **D**ifferential **E**quation **S**pecified **S**ystems
   (DESS, zeitkontinuierliche Systeme).

3. **D**iscrete **Ev**ent Specified **S**ystems
   (DEVS, ereignisdiskrete Systeme).

Zeitdiskretes System – Beispiel

Die Bevölkerungsentwicklung in einem Land wird modelliert mit:

Zeitbasis: $T = 2000, 2001, \ldots$

Eingabe: $Geburtenrate_{alter}[t], Sterblichkeit_{alter}[t], alter \in [0, 99]$.

Ausgabe: $Bevölkerung[t]$.

Zustand: Altersverteilung: $Leute_{alter}, alter \in [0, 99]$.

Zustandsübergangsfunktion:

$$
\begin{aligned}
Leute_0 &:= \sum_{a=16}^{a=40} Geburtenrate_a[t] \cdot Leute_a \text{ (Zugänge)} \\
Leute_a &:= Leute_{a-1} \cdot Sterblichkeit_a[t], a \in [1, 99] \text{(Abgänge, Altern)}
\end{aligned}
$$

Ausgabefunktion:

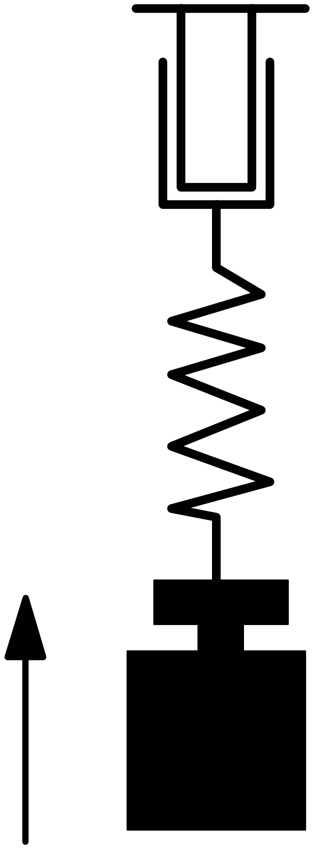
$Bevölkerung[t] = \sum_{a=0}^{a=99} Leute_a[t]$

Zeitdiskrete Systeme/DTSS

Ein zeitdiskretes System ist ein dynamisches System mit:

- Einer zu den ganzen Zahlen isomorphe Menge $T = t_c \cdot \mathbb{N}$ als Zeitbasis.
- Zustandsmenge X ist eine beliebige Menge.
- Die Eingabemenge U ist eine beliebige Menge.
- Eingabesignale $u[n]$ sind diskrete Folgen.
- Ausgabemenge Y ist eine beliebige Menge.
- Ausgabesignale $y[n]$ sind diskrete Folgen..
- Zustandsübergangsfunktion $\varphi_{DTSS} : U \times X \rightarrow X$.
- Ausgabefunktion $\eta_{DTSS} : X \rightarrow Y$.

Zeitkontinuierliches System – Beispiel



$$\dot{v} = a$$

$$\dot{y} = v$$

$$y = \frac{1}{k}(ma + cv + F_{ext})$$

Zeitkontinuierliche Systeme/DESS

Ein zeitkontinuierliches System ist ein dynamisches System mit:

- $T = \mathbb{R}$.
- X ist reellwertiger Vektorraum $\mathbb{R}^n$ (‘Zustandsraum’).
- U ist reellwertiger Vektorraum $\mathbb{R}^m$ (‘Eingaberaum’).
- Eingabesignale $u(t)$ sind stückweise kontinuierlich.
- Y ist reellwertiger Vektorraum $\mathbb{R}^p$ (‘Ausgaberaum’).
- Ausgabesignale $y(t)$ sind stückweise kontinuierliche.
- $\varphi_{DESS} : X \times U \rightarrow X$ ist **Zustandsänderungsfunktion**, die die Änderung der Zustände in Form einer Differentialgleichung beschreibt.
- $\eta_{DESS} : X \rightarrow Y$ bzw. $\eta_{DESS} : X \times \{u(t)\} \rightarrow Y$ als Ausgabefunktion.

Ereignisdiskrete Systeme/DEVS

- $T = \mathbb{R}$, Wertebereiche U, Y sind beliebige Mengen.
- $u(t), y(t)$ sind stückweise konstante Signale.
- Zustandsmenge $X_{DEVS} = \{(s, e) \mid s \in S, e \in E\}$, wobei:
  - S die Menge aller diskreten Zustände ist und
  - $E = [0, t_a(s)]$ die Menge der Zeitpunkte zwischen dem letzten Ereignis und dem nächsten internen Zustandsübergang ist.
- $\varphi_{DEVS} = (\varphi_{int}, \varphi_{ext}, t_a) : U \times X \times T \to X$ die Zustandsübergangsfkt., die aus den Teilfunktionen
  - $\varphi_{int} : S \to S$ (Interne Zustandsübergangsfunktion),
  - $\varphi_{ext} : X \times U \to X$ (Externe Zustandsübergangsfunktion) und
  - $t_a : S \to \mathbb{R}_0^+ \cup \infty$ (Zeitfortschrittsfunktion)

  besteht.
- $\eta_{DEVS} : S \to Y$ eine Ausgabefunktion.

Hybride Systeme

Häufig werden Systeme gemischt kontinuierlicher und diskreter modelliert.

Solche Systeme werden **hybride Systeme** genannt (auch: “Heterogene Systeme”).

Beispiele:

- Digitaler (diskreter) Prozessor (Steuerung) + analoge (kontinuierliche) Umgebung.

- Hüpfender Ball. . .

Systemeigenschaften

Unterschiedliche Systeme können identische Eigenschaften haben, die dann eine einheitliche, mathematische Behandlung erlauben!

Wir werden jetzt die folgenden Eigenschaften definieren:

- Kombinatorisches System/zustandsbehaftetes System.
- Kausalität.
- Linearität.
- Zeitinvarianz.
- Stabilität.

Kombinatorisches System/zustandsbehaftetes System.

Kombinatorisches System: Ein System, dessen Ausgabe $y(t)$ zum Zeitpunkt t nur von der Eingabe $u(t)$ zum selben Zeitpunkt t abhängt, wird als *kombinatorisches System* bezeichnet.

Zustandsbehaftetes System: Ein System, dessen Ausgabe $y(t)$ zum Zeitpunkt t von $u(t)$ zu anderen Zeitpunkten als t abhängt, wird als *zustandsbehaftetes System* bezeichnet.

Kausales System/Nicht kausales System

Die Kausalität besagt, dass eine Reaktion erst eintreten kann, nachdem die Ursache $u(t)$ eingetreten ist.

Etwas formaler heisst das, dass bei Eingabe zweier Signale $u_1(t), u_2(t)$, die bis zum Zeitpunkt τ identisch sind, die Ausgaben ebenfalls bis zu diesem Zeitpunkt identisch sein müssen:

Ein System ist *kausal*, wenn:

$$u_1(t) = u_2(t) \forall t \leq \tau \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}(u_1(t)) = \mathcal{T}(u_2(t)) \forall t \leq \tau$$

Kausales Signal/Nicht kausales Signal

Hinweis: Der Begriff *Kausal* wird auch im übertragenen Sinne für *Signale* verwendet.

Ein Signal wird als *kausal* bezeichnet, wenn

$$f(t) = 0 \quad \forall\, t < 0$$

Um aus einem nichtkausalen Signal $f(t)$ ein kausales Signal $f_k(t)$ zu erzeugen, multipliziert man diese mit der Sprungfunktion $s(t)$: $f_k(t) = s(t)f(t)$.

Kausalität – Beispiele

Ist die Systemfunktion $\mathcal{T} : y(t) = u(t-1)^2$ kausal?

Ist die Systemfunktion $\mathcal{T} : y(t) = u(t+1) + t^2$ kausal?

Ist das Signal $f(t) = e^{-t}$ ein kausales Signal?

Ist das Signal $f(t) = s(t)e^{-t}$ ein kausales Signal?

JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Lineares System/Nichtlineares System

Anschaulich gilt für ein lineares System:

1. Wenn man den Wert eines Eingangssignals um eine Faktor k erhöht, erhöht sich auch der Wert des Ausgangssignals um den Faktor k ("Skalierbarkeitseigenschaft"), und

2. Es ist egal, ob man zwei Eingabesignale vor- oder nach der Verarbeitung jedes einzelnen Signals durch das System addiert. ("Überlagerungseigenschaft").

Lineares System/Nichtlineares System (2)

Formaler:

Ein System wird als linear bezeichnet, wenn gilt:

$$\mathcal{T}\{\sum_{i=1}^{n} k_i u_i(t)\} = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathcal{T}\{u_i(t)\}$$

Hinweis:
Die Integration kann auch als Grenzwert einer Summe dargestellt werden.

Linearität – Beispiel

Ein System berechne seine Ausgabe $y[n]$ als Summe der beiden letzten Eingaben $u[n]$ und $u[n-1]$:

$$y[n] = u[n] + u[n-1]$$

Um die Linearität zu zeigen, muss gezeigt werden, dass

$$\mathcal{T}\{\sum_{i=1}^{n} k_i u_i[n]\} = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathcal{T}\{u_i[n]\} \tag{1}$$

oder – was einfacher zu zeigen ist – $c\mathcal{T}\{u[n]\} = \mathcal{T}\{cu[n]\}$ (Skalierbarkeit) *und* $\mathcal{T}\{u_1[n] + u_2[n]\} = \mathcal{T}\{u_1[n]\} + \mathcal{T}\{u_2[n]\}$ (Überlagerungseigenschaft).

Linearität – Beispiel

Für das oben genannte System gilt:

$$c\mathcal{T}\{u[n]\} = c(u[n] + u[n-1]) = cu[n] + cu[n-1] = \mathcal{T}\{cu[n]\}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\{u_1[n]\} + \mathcal{T}\{u_2[n]\} &= (u_1[n] + u_1[n-1]) + (u_2[n] + u_2[n-1]) \\
&= (u_1[n] + u_2[n]) + (u_1[n-1] + u_2[n-1]) \\
&= \mathcal{T}\{u_1[n] + u_2[n]\}
\end{aligned}$$

Damit ist dessen Linarität bewiesen!

Zeitinvariant/Zeitabhängig

Ein zeitinvariantes System ist ein System, dessen Verhalten nicht von der Zeit abhängig ist. Formal heißt das, dass durch eine Verschiebung der Eingangssignale entlang der Zeitachse nur die Ausgangssignale entsprechend der Zeitachse verschoben werden, d. h für zeitinvariante Systeme gilt:

$$\mathcal{T}\{u(t-t_0)\} = y(t-t_0) \quad \forall\, t_0 \in T : t - t_0 \in T$$

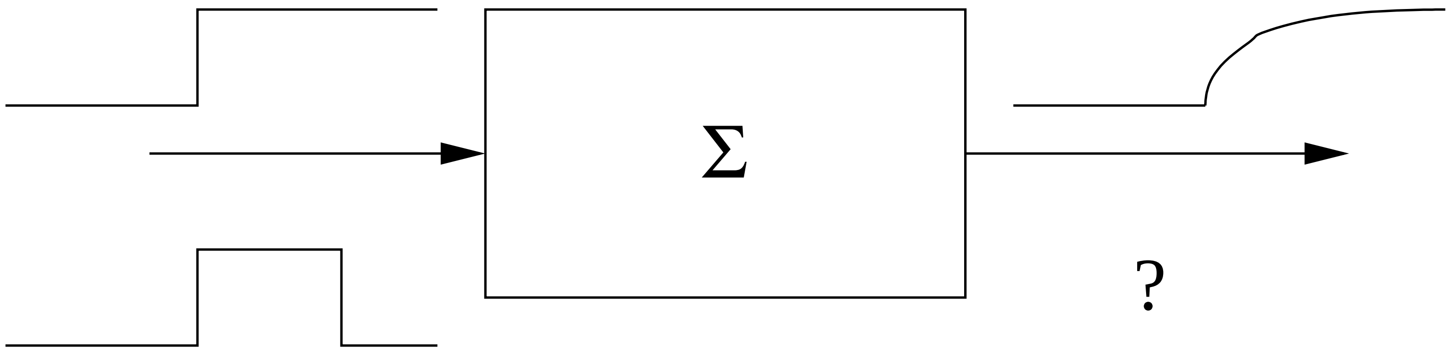
Superpositionsprinzip (1)

Aus der Linearität ergibt sich direkt das **Superpositionsprinzip**, welches in vielen Problemstellungen außerordentlich bequeme Lösungen ermöglicht.

Prinzip:

1. Eine (komplexe) Eingabe in unterschiedliche, voneinander unabhängige (einfache) Eingaben zerlegen, für die sich eine Lösung berechnen lässt.
2. Die einzelnen Ausgaben dann aufzusummieren.

Superpositionsprinzip — Beispiel



Bekannt sei: $\mathcal{T}\{s(t)\} = s(t)(1 - e^{-t})$

Gesucht sei: $\mathcal{T}\{u_2(t)\}$

Stabilität

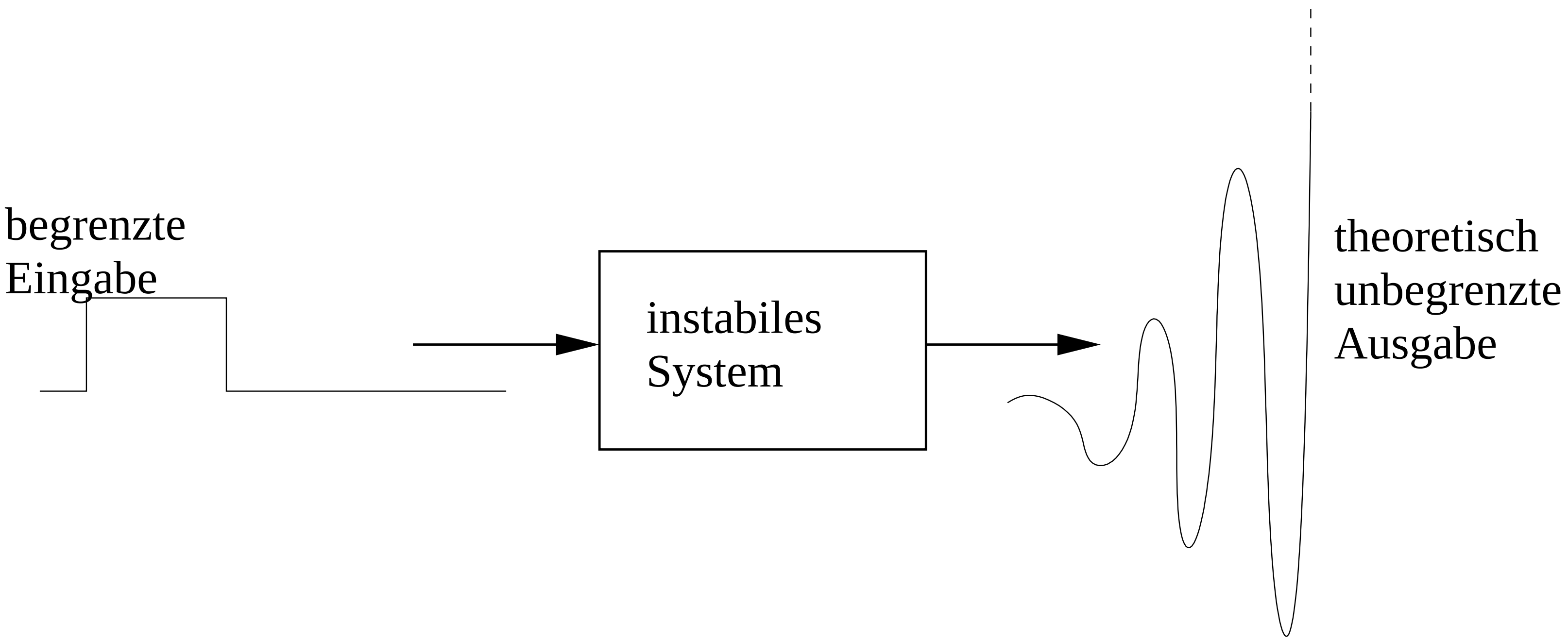
Ein System wird als *stabil* bezeichnet, wenn für beliebige Eingabesignale $u(t)$, die unterhalb einer Schranke M liegen, die Ausgabesignale $y(t) = T\{u(t)\}$ unter einer Schranke N bleiben.

Ein System ist stabil, wenn:

$$|u(t)| < M < \infty \Rightarrow |\mathcal{T}\{u(t)\}| < N < \infty$$

Stabilität (2)

Die Instabilität von Systemen mit physikalischen Teilen führt meist zur Zerstörung eines Teils . . .



Stabilität - Beispiel

Ein System berechne seine Ausgabe $y[n]$ als Summe der beiden letzten Eingaben $u[n]$ und $u[n-1]$:

$$y[n] = u[n] + u[n-1]$$

Frage: Ist das System stabil?

Behauptung: Das System ist stabil.

Um die Stabilität zu zeigen, müssen wir beweisen, dass

$$|u(t)| < M < \infty \Rightarrow |\mathcal{T}\{u[n]\}| < N < \infty$$

Stabilität - Beispiel (2)

Direkter Beweis:

Sei $u[t]$ eine Eingabe mit $|u[t]| < M$.
Es gilt dann:

$$|\mathcal{T}\{u[n]\}| = |u[n] + u[n-1]| \leq |M + M| = |2M|$$

Damit ist die Ausgabe beschränkt auf $N = 2M$, und das System ist stabil.